AU

6. La logique combinatoir e



Introduction

S'appuyant sur l'algèbre booléenne, ou algèbre de Boole (du mathématicien britannique George Boole), la **logique combinatoire** est une approche particulièrement utilisée dans les systèmes industriels.

Les notions liées à cette logique s'appliquent aussi bien à l'électricité, à l'électronique, au pneumatique qu'à l'automatisme et à sa programmation. Elle est d'ailleurs à la base de nombreux dispositifs industriels.

La logique combinatoire permet de traduire des signaux « tout ou rien » en expressions mathématiques, dans lesquelles chaque signal élémentaire est une **variable logique,** ces dernières étant combinées et traitées par des **fonctions logiques**.

Variable logique

Le **code binaire** est une représentation numérique en base **deux**. Il permet, dans beaucoup de dispositifs industriels, de représenter des grandeurs physiques en utilisant les chiffres 0 et 1. On décrit ainsi l'évolution des **variables vraies ou non vraies** d'un système automatisé, le 1 représentant généralement le niveau haut et le 0 le niveau bas.

Une variable logique ne peut donc prendre que deux états : 0 ou 1.

Exemples :

absence de tension ➡ 0 / présence de tension ➡ 1

voyant éteint ➡ 0 / voyant allumé ➡ 1

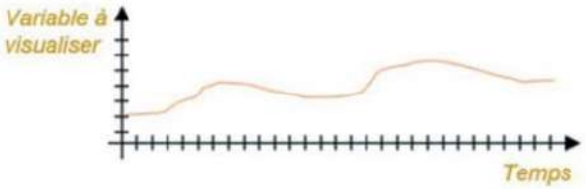
*Nota : a contrario, on appellera **variable analogique**, une variable pouvant prendre une multitude d'états.*

Chronogramme

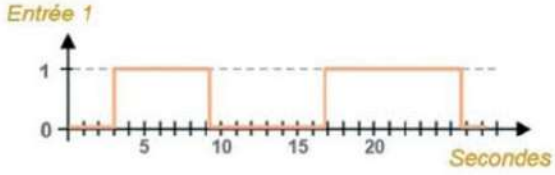
Un **chronogramme** est une représentation temporelle graphique de l'évolution de l'état d'une ou plusieurs variables appelées **entrées**. D'une manière générale, la variable représentée peut être logique ou analogique.

Le chronogramme se présente graphiquement sous la forme de deux axes :

- celui des **abscisses** (horizontal), représentant le temps et dont l'unité pourra être la seconde, la minute, l'heure, le jour, etc.
- celui des **ordonnées** (vertical), représentant la variable à visualiser.



L'utilisation de chronogrammes dans le cadre de la logique combinatoire implique que les entrées caractérisent l'état physique d'une variable matérielle, physique ou virtuelle, ne pouvant prendre que deux états, 0 ou 1 (variable logique).



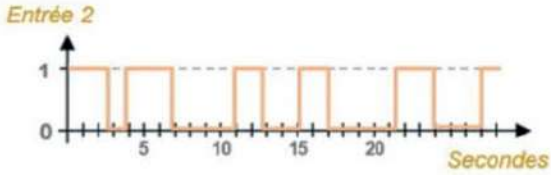


Table de vérité

Les combinaisons résultant d'une association d'entrées peuvent être organisées dans un tableau que l'on appelle **table de vérité**.

La table de vérité est la représentation de l'évolution du comportement d'un système automatisé en fonction des variations de ses entrées (variables logiques).

Le nombre de combinaisons dépend du nombre d'entrées :

n entrées ➡ 2^n combinaisons

Si un schéma possède 1 entrée, $2^1 = 2$ combinaisons possibles.

Si un schéma possède 2 entrées, $2^2 = 2 \times 2 = 4$ combinaisons possibles.

Si un schéma possède 3 entrées, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ combinaisons possibles, etc...

Exemple de schéma à 3 entrées

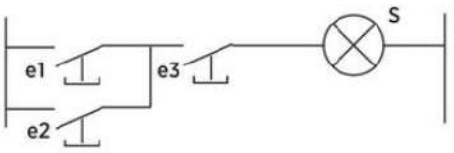


Table de vérité associée :

e3	e2	e1		S
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

8 combinaisons possibles

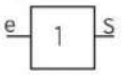
Fonctions logiques

Une **fonction logique** (ou fonction booléenne) est une fonction de **variables logiques** pouvant prendre deux valeurs (0 ou 1), définie sur 2^n combinaisons où n représente le nombre de variables d'entrée. Toute fonction logique peut être réalisée à l'aide d'un petit nombre de fonctions de base appelées opérateurs logiques ou portes.

On distinguera les **opérateurs fondamentaux** (OUI, NON, ET, OU), des **opérateurs dérivés** (NON-ET, NON-OU, OU-EXCLUSIF, NON-OU-EXCLUSIF).

Opérateur OUI

Symbole :



Équation : $S = e$

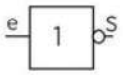
Table de vérité :

e1		S
0		0
1		1

Opérateur NON

la « barre » signifie « inverse »

Symbole :



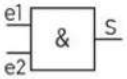
Équation : $S = \overline{e}$

Table de vérité :

e1		S
0		1
1		0

Opérateur ET

Symbole :



Équation : $S = e1 \cdot e2$

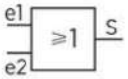
le « . » se lit « et »

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		0
0	1		0
1	0		0
1	1		1

Opérateur OU

Symbole :



Équation : $S = e1 + e2$

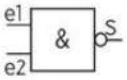
le « + » se lit « ou »

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		1

Opérateur NON-ET

Symbole :



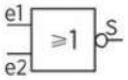
Équation : $S = \overline{e1 \cdot e2}$

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		1
0	1		1
1	0		1
1	1		0

Opérateur NON-OU

Symbole :



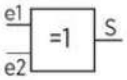
Équation : $S = \overline{e1 + e2}$

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		1
0	1		0
1	0		0
1	1		0

Opérateur OU-EXCLUSIF

Symbole :



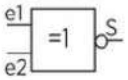
Équation : $S = e1 \oplus e2$

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		0
0	1		1
1	0		1
1	1		0

Opérateur NON-OU-EXCLUSIF

Symbole :



Équation : $S = \overline{e1 \cdot e2} + e1 \cdot e2$

Table de vérité :

e2	e1		S
0	0		1
0	1		0
1	0		0
1	1		1

Équations logiques

Équations logiques de base :

$a + a = a$; $a \cdot a = a$; $a + 1 = 1$; $a \cdot 1 = a$; $a + 0 = a$; $a \cdot 0 = 0$; $a + \overline{a} = 1$; $a \cdot \overline{a} = 0$

Propriétés des équations :

Commutativité : $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$

Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivité de · par rapport à + : $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

Distributivité de + par rapport à · : $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Inclusion : $a + a \cdot b = a + b$

Théorème de De Morgan :

Le complément d'une somme est égal au produit des compléments de chaque facteur : $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments de chaque facteur : $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

Remarque : si on complémente deux fois S, on retrouve S.